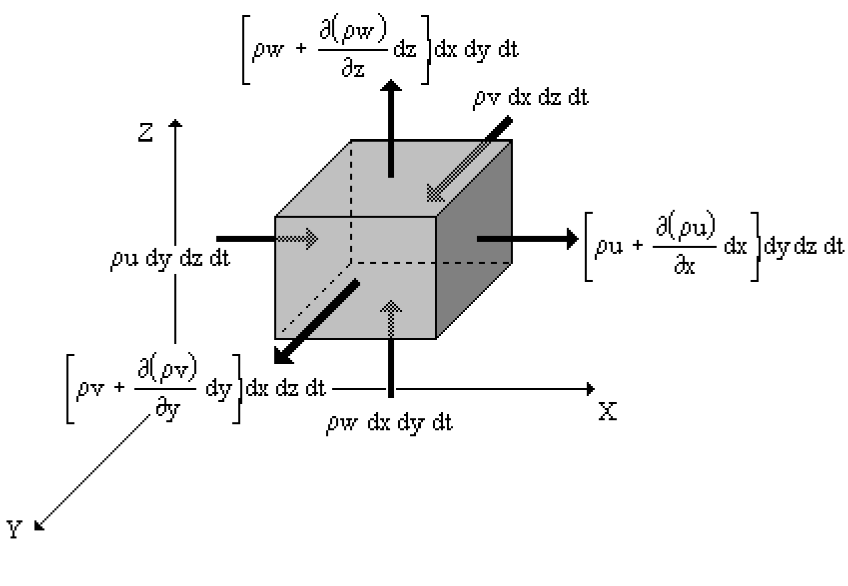
ELEMENTOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

Equações Fundamentais. Conservação de Massa, Quantidade de Movimento e Energia



Antônio Cardoso Neto

ÍNDICE

ELEMENTOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS
Equações Fundamentais. Conservação de Massa, Quantidade de Movimento e Energia.

1. INTRODUÇÃO E GENERALIDADES

Antes de qualquer coisa, é necessário que se diga de uma vez por todas que, na língua portuguesa, as vogais **i** e **u** não recebem acento quando constituírem sílaba tônica seguida de **nh**, **i** ou **u**, como é o caso do substantivo *fluido*, cujos fundamentos de sua mecânica nos propomos a estudar nesta apostila. *Fluído* é o particípio passado do verbo *fluir*, e seria o objeto de nosso presente estudo, caso falássemos castelhano e nossa apostila se chamasse *Elementos de Mecánica de los Fluidos*.

A finalidade principal da hidrodinâmica é o estabelecimento das leis que regem o movimento dos fluidos. A condição física de um fluido é totalmente determinada se forem conhecidas as componentes u, v e w da velocidade (relativas aos eixos cartesianos x, y e z, respectivamente), assim como os valores da densidade ρ e da pressão p, para qualquer tempo t e todos os pontos ocupados pelo fluido. Há, portanto, cinco incógnitas (u, v, w, p e ρ) e quatro variáveis independentes (x, y, z e t) no problema relativo ao escoamento dos fluidos. As cinco equações necessárias para que haja possibilidade de resolução do sistema são:

① *Uma equação de conservação de massa*. Uma expressão que se baseie na continuidade espacial e temporal da matéria.

② *Três equações gerais do movimento*. Relações de causa-efeito que exprimam as leis que regem o movimento nas direções dos três eixos ortogonais cartesianos. Freqüentemente, são utilizadas as equações resultantes da projeção de *d'Alambert*[1].

③ *Uma equação complementar*. Uma equação que traduza a dependência entre duas ou mais variáveis dependentes, levando em conta a natureza do fluido. Também é chamada de *equação de estado*.

Há dois métodos de abordagem do problema:

❶ *O método de Lagrange*.[2] Consiste no acompanhamento das partículas individuais em seu movimento ao longo de suas trajetórias. Segundo este critério, resolve-se o seguinte problema:

> "Conhecida a posição (x_1,y_1,z_1), a pressão p_1 e a densidade ρ_1 de uma partícula líquida, no instante t_1 , determinar sua pressão p, sua densidade ρ e sua posição (x,y,z) no instante t."
>
> PIMENTA, C. F. (1977).

❷ *O método de Euler*.[3] Estuda as grandezas físicas do fluido no decorrer do tempo, em um determinado *volume de controle*, fixo no espaço. No método de Euler, o problema é enunciado da seguinte forma:

---

[1] Jean le Rond d'Alambert (1717-1783). Matemático e enciclopedista francês. Foi quem esclareceu o conceito de limite. Publicou *Traité de Dynamique* em 1743, onde consta seu princípio de projeção, deduzido a partir da terceira lei de Newton. Trata-se de um método geral de redução dos problemas dinâmicos a problemas estáticos, por meio da superposição de forças adicionais correspondentes às acelerações.

[2] J. L. Lagrange (1736-1813). Matemático naturalizado francês, nascido em Turim (Itália). Um dos fundadores da *École Polytechnique*, onde trabalhou em Teoria dos Números e na solução sistemática de equações diferenciais. Seu maior trabalho foi *Mécanique Analytique*.

> "Conhecida a velocidade (u_1 , v_1 , w_1), a pressão p_1 e a massa específica ρ_1 no instante t_1 , em um dado ponto (x,y,z), determinar a pressão p, a densidade ρ e a velocidade (u,v,w) nesse mesmo ponto, no tempo t."
>
> PIMENTA, C. F. (1977)

Sempre que possível, adota-se o método de Euler, por sua comodidade e simplicidade.

2. CONCEITOS BÁSICOS

2.1. Regimes Laminar e Turbulento

Em experiências independentes e simultâneas, efetuadas por Hagen e por Poiseuille em 1839 sobre o movimento dos líquidos em tubos de pequeno diâmetro, foi observado que a pressão diminui com o valor da velocidade de forma linear, quando a velocidade é baixa. Também observaram que essa lei de variação não é válida para altas velocidades. Notaram ainda a dependência do diâmetro do tubo e da temperatura do líquido nesse fenômeno.

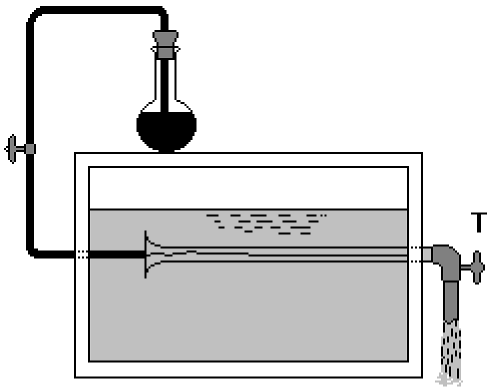


Figura 1- Dispositivo de Reynolds.

Em 1883, procurando observar o comportamento do escoamento dos líquidos, Osborne Reynolds empregou um dispositivo como o esquematizado na figura 1, que consiste de um tubo transparente inserido em um recipiente com paredes de vidro. Um corante é introduzido na entrada do tubo. Ao abrir gradualmente o obturador T, observa-se a formação de um filete retilíneo. Neste tipo de movimento, definido como laminar, as partículas apresentam trajetórias bem definidas que não se cruzam. Ao abrir mais a torneira, a velocidade aumenta e o filamento se difunde no líquido, como conseqüência do movimento desordenado das partículas. Este regime denomina-se turbulento. Ao reverter o processo, o filamento regular se reestabelece a partir de uma certa velocidade, a qual recebe a denominação de *velocidade crítica inferior.*

Após investigações experimentais e teóricas, Reynolds concluiu que o critério mais apropriado para se determinar o tipo de escoamento em uma canalização não se atém exclusivamente ao valor da velocidade, mas a uma expressão adimensional na qual a viscosidade do líquido também é levada em consideração. Este adimensional, que passou a ser conhecido como *Número de Reynolds*, é expresso da seguinte maneira:

$$R_e = \frac{VD}{\nu} \qquad (1)$$

onde V é a velocidade, D é o diâmetro do conduto e ν é a chamada *viscosidade cinemática*. O regime laminar ocorre e é estável, nos casos práticos, para Reynolds inferior a 2000. Entre 2000 e 4000 há uma zona crítica, na qual não se pode determinar a perda de carga com muita segurança[4].

---

[3] Leonhard Euler (1707-1783). Matemático suíço. Discutiu Mecânica, Cálculo, Álgebra, Teoria dos Números e a maioria dos tópicos matemáticos de seu tempo. Foi aluno de Johann Bernoulli, na juventude. Morreu cego na Alemanha.

[4] Embora já se tenha observado, em condições de laboratório, regime laminar com valores de Reynolds superiores a 40.000, o escoamento é sempre turbulento para Reynolds superior a 4.000 em tubos comerciais. Para um

Além da velocidade e da viscosidade cinemática do líquido, o número de Reynolds também leva em conta uma dimensão linear característica. No caso de tubos de seção circular, esta dimensão é o diâmetro D da tubulação, como visto na equação 1. Para seções não-circulares, toma-se esta dimensão como sendo o quádruplo do raio hidráulico[5].

2.2. Grandezas Instantâneas e Médias

Durante o escoamento, uma determinada partícula, que se encontra em um ponto P no tempo t, é dotada de uma velocidade instantânea $\vec{v}$. Devido à tridimensionalidade do escoamento, essa velocidade varia tanto temporal como espacialmente, tanto em intensidade como em direção e sentido. O escoamento é dito *permanente* quando os parâmetros envolvidos são temporalmente invariantes em todo e qualquer ponto do escoamento. Um conceito importante é o da *velocidade média*, quando se pretende conceituar o *movimento permanente em média*:

$$\vec{V}_m = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\vec{V}dt \qquad (2)$$

onde Δt é o intervalo de tempo considerado[6]. Analogamente, pode-se definir valores médios e instantâneos para as outras grandezas que intervêm no escoamento, como a pressão e a densidade. Em alguns métodos de simulação numérica de escoamentos não permanentes, utiliza-se este conceito de escoamento permanente em média, durante pequenos intervalos de tempo.

2.3. Nomenclatura Elementar

① Chama-se *campo de velocidades* ao conjunto constituído pelas velocidades instantâneas das partículas, que em determinado tempo t ocupam um volume V no espaço. A curva tangente às velocidades instantâneas de uma partícula individualizada é chamada *linha de corrente* (figura 2), cuja equação é:

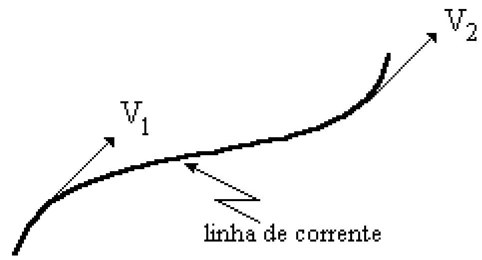


Figura 2- Definição de linha de corrente.

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \qquad (3)$$

Se o campo de velocidades, de densidade e de pressão for temporalmente invariável, ou seja, se o movimento for permanente, as linhas de corrente coincidem com as trajetórias das partículas. No entanto, se o escoamento não for permanente, o campo de velocidades varia com o tempo provocando variação temporal das linhas de corrente, o que é de se esperar que ocorra.

② *Tubo de corrente* é uma superfície fechada que contém linhas de corrente. Quando se analisa um tubo de corrente de seção transversal infinitesimal, geralmente se refere a ele como um *filete de corrente*.

③ A *vazão* Q através da seção S de um tubo de corrente, mostrado na figura 3, é definida como:

---

escoamento a uma velocidade de 0,90 m/s, a 20° C (ν=0,000001 m^2/s) em uma canalização de 50 mm de diâmetro, tem-se um valor de aproximadamente 45.000 para o número de Reynolds.

[5] Raio hidráulico é a razão entre a seção ocupada pelo fluido, transversal à direção do escoamento, e o perímetro da fronteira desta seção com o conduto que a limita.

[6] Em certos problemas de aerodinâmica Δt é da ordem de minutos, ao passo que na simulação de alguns escoamentos esse intervalo pode ser da ordem de centésimo de segundo.

$$Q = \int_S \vec{v}.\vec{n}\, ds \tag{4}$$

onde $\vec{n}$ é o versor normal à cada ponto da seção S, em um determinado tempo t. Portanto, a *vazão média* é:

$$Q_m = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} Q.dt = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\int_S \vec{v}.\vec{n}\, ds = \int_S \vec{v}_m.\vec{n}\, ds \tag{5}$$

Logo, a *velocidade média de uma corrente líquida* pode ser expressa por:

$$\bar{v} = \frac{Q}{S} = \frac{\int_S \vec{v}_m.\vec{n}\, ds}{S} \tag{6}$$

O valor do produto da vazão pela densidade[7] se denomina *descarga* ou *vazão mássica*.

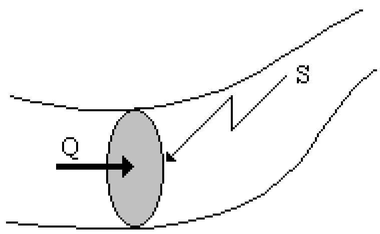


Figura 3- Tubo de corrente.

3. EQUAÇÕES GERAIS DO ESCOAMENTO

Na dedução das equações fundamentais do escoamento de um fluido ideal, será usada a abordagem de Euler, através de um volume de controle de dimensões infinitesimais.

3.1. Conservação de Massa

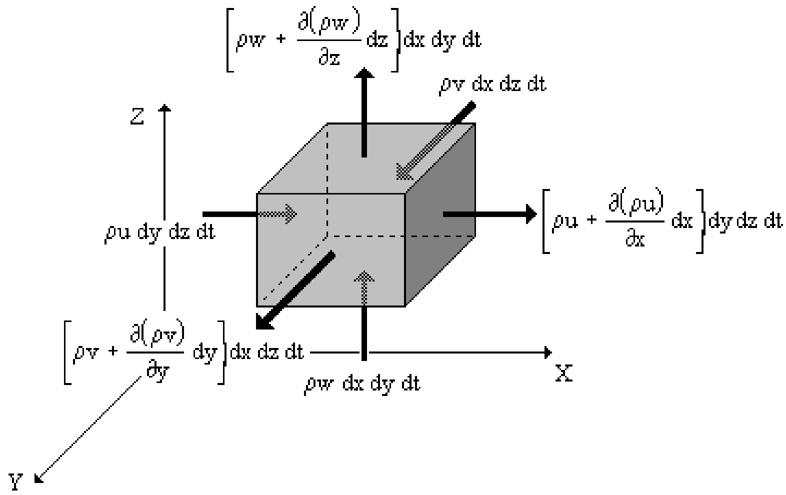


Figura 4- Volume de controle elementar.

Nas velocidades de valores práticos, a conservação da massa é um princípio óbvio e intuitivo[8]. Seja o paralelepípedo invariável e fixo no espaço (figura 4), de arestas dx, dy e dz de dimensões infinitesimais, com seu interior totalmente ocupado por um fluido de densidade transitória ρ.

Durante um intervalo infinitesimal de tempo dt, a massa específica passa de ρ para $\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$. Portanto, a variação de massa do volume do paralelepípedo é:

[7] Também denominada *massa específica*.

[8] Em *Hidráulica Relativística*, ramo da ciência que se ocupa do estudo de explosão de supernovas e do escoamento da matéria inter-galáctica, não se considera a conservação da matéria, devido à transformação de matéria em energia ($E=mc^2$) e ao aumento de massa com a velocidade segundo Einstein.

$$dm = \left[\left(\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) - \rho\right] dx\ dy\ dz\ dt = \frac{\partial\rho}{\partial t}\ dx\ dy\ dz\ dt \qquad (7)$$

A massa que entra no volume infinitesimal, durante o intervalo dt é:

$$m_{entra} = \rho(u\ dy\ dz + v\ dx\ dz + w\ dx\ dy)dt \qquad (8)$$

E a massa que sai do volume durante o mesmo intervalo é:

$$m_{sai} = \rho(u\ dy\ dz + v\ dx\ dz + w\ dx\ dy)dt + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dx\ dy\ dz\ dt \qquad (9)$$

Portanto, o balanço de massa fornece:

$$dm = m_{entra} - m_{sai} \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \qquad (10)$$

No caso dos líquidos, considerados incompressíveis (ρ espacialmente uniforme e temporalmente constante), a equação da continuidade fica simplesmente:

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0 \qquad (11)$$

Ou seja: *O divergente do vetor velocidade é sempre nulo para os fluidos incompressíveis*.

3.2. A Equação de Euler

As forças externas que atuam sobre um fluido em movimento podem ser classificadas em duas categorias distintas, a saber:

❶ Forças relacionadas à superfície. Forças decorrentes da pressão externa sobre as seis faces do paralelepípedo infinitesimal.

❷ Forças dependentes do volume.

① *O peso*. Ocasionado pela gravidade, no sentido vertical descendente.

② *Forças dependentes da massa*. Forças dependentes da massa do fluido, cujas componentes cartesianas por unidade de massa são designadas aqui por X, Y e Z que têm, portanto, dimensões de aceleração [LT^{-2}].

As força causadas pela pressão externa nas faces do volume de controle estão esquematizadas na figura 5.

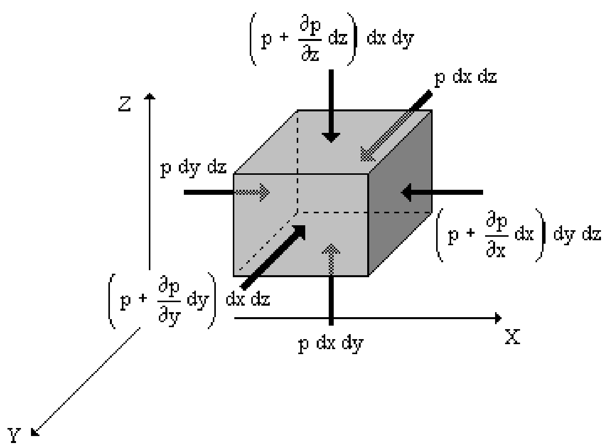


Figura 5- Forças exercidas pela pressão externa nas faces do volume de controle.

Logo, a força resultante da pressão externa é:

$$\vec{F}_p = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}; \frac{\partial p}{\partial y}; \frac{\partial p}{\partial z}\right) dx\ dy\ dz \qquad (12)$$

A resultante das forças externas dependentes da massa é:

$$\vec{F}_{ext} = \rho(X;Y;Z)dx\,dy\,dz \tag{13}$$

A força peso é simplesmente:

$$\vec{F}_g = -\rho\,dx\,dy\,dz\,(0;0;g) \tag{14}$$

onde g é a aceleração da gravidade.

Finalmente, a força devida à inércia do escoamento pode ser descrita pela seguinte expressão:

$$\vec{F}_{in} = \rho\,dx\,dy\,dz\left(\frac{d^2x}{dt^2};\frac{d^2y}{dt^2};\frac{d^2z}{dt^2}\right) \tag{15}$$

Entretanto, como $\vec{V}.\vec{V} = f(x,y,z,t)$, pode-se escrever:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \tag{16}$$

Igualando as forças inerciais às forças externas, tem-se a equação de Euler:

$$\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z-g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix} \tag{17}$$

Ou, de forma mais compacta,

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = \vec{R} - \frac{D\vec{V}}{Dt} + \vec{e}_g \tag{18}$$

onde $\vec{R}$ é o vetor da resultante das forças externas por unidade de massa e $\vec{e}_g$ é o vetor da aceleração da gravidade.

Alguns casos particulares interessantes são:

➊ **Movimento permanente**. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$. Multiplicando a equação 17 (escrita em termos das derivadas totais), e multiplicando ambos os membros pelo vetor linha (dx dy dz),se obtém:

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = Xdx + Ydy + (Z-g)dz - \left(\frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dt}dz\right) \tag{19}$$

ou seja:

$$\frac{1}{\rho}dp = Xdx + Ydy + (Z-g)dz - (u\,du + v\,dv + w\,dw) \tag{20}$$

ou ainda;

$$\frac{1}{\rho}dp = Xdx + Ydy + (Z-g)dz - d\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) \tag{21}$$

A expressão 21 é a equação de Euler para escoamento permanente.

❷ **Fluido em repouso**. Para V=0, a equação 21 fica:

$$\frac{1}{\rho}dp = Xdx + Ydy + (Z-g)dz \qquad (22)$$

que nada mais é que a equação fundamental da hidrostática.

❸ Uma decorrência da aplicação da equação de Euler a líquidos pesados, em regime permanente e sujeitos à ação da gravidade, cujas condições são X=Y=Z=0, é:

$$\frac{1}{\rho g}dp + dz + d\left(\frac{V^2}{2g}\right) = 0 \Rightarrow \frac{p}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} = \text{constante} \qquad (23)$$

que é o teorema de Bernoulli, que será visto adiante.

3.3. A Equação Complementar

Essa equação extra é obtida, considerando-se uma característica particular do fluido, como, por exemplo, as seguintes:

① *Fluidos homogêneos e incompressíveis*. ρ = constante.

② *Gases perfeitos*. p=gRTρ, onde R é a constante universal dos gases perfeitos e T é a temperatura. No entanto uma nova incógnita (a temperatura) é introduzida aqui. Pode-se admitir que a temperatura seja constante, em alguns casos.

4. CINEMÁTICA DOS FLUIDOS

Independente da análise das causas e efeitos do movimento dos fluidos, deve-se compreender seu comportamento cinemático.

Sejam os pontos P_1 e P_2, dotados de velocidades V_1 e V_2, respectivamente, como mostrados na figura 6.

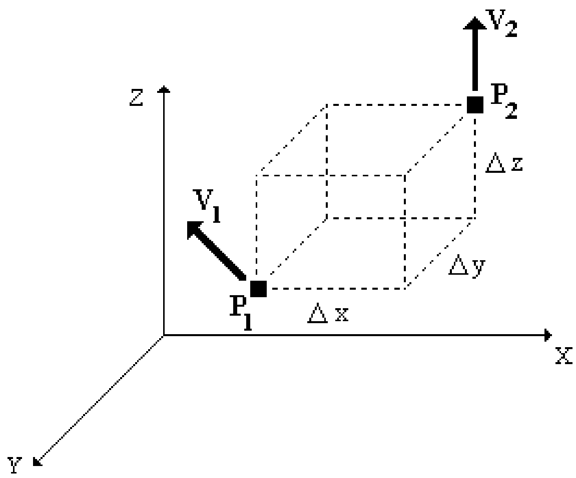


Figura 6- Movimento relativo entre dois pontos próximos, de uma mesma partícula.

A continuidade do meio permite escrever:

$$\begin{cases} u_2 = u_1 + \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial u}{\partial z}\Delta z \\ v_2 = v_1 + \dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial v}{\partial z}\Delta z \\ w_2 = w_1 + \dfrac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial w}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial w}{\partial z}\Delta z \end{cases} \qquad (24)$$

Rearranjando as expressões acima, se obtém:

$$u_2 = u_1 + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\Delta z - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta y\right]}_{u_r} + \underbrace{\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\Delta z\right]\right\}}_{u_d} \qquad (25)$$

$$v_2 = v_1 + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta x - \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\Delta z\right]}_{v_r} + \underbrace{\left\{\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\Delta z\right]\right\}}_{v_d} \qquad (26)$$

$$w_2 = w_1 + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\Delta y - \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\Delta x\right]}_{w_r} + \underbrace{\left\{\frac{\partial w}{\partial z}\Delta z + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\Delta y\right]\right\}}_{w_d} \quad (27)$$

Ou seja:

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{V}_r + \vec{V}_d \quad (28)$$

Portanto, pode-se considerar que o movimento do ponto P_2, situado no interior da partícula, é resultante da composição de três movimentos.

❶ *Translação*. Neste caso, se a velocidade (tanto em intensidade como em direção e sentido) em P_2 é a mesma de P_1, a partícula sofre uma translação, sem movimento relativo entre os dois pontos.

❷ *Rotação*. Pode-se observar que:

$$\vec{V}_r = \vec{\Omega} \wedge (P_2 - P_1) = (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) \wedge (P_2 - P_1) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{rot}.\vec{V}\right) \wedge (P_2 - P_1) \quad (29)$$

o que representa uma rotação. Ao vetor $\vec{\Omega}$, dá-se a denominação *vetor turbilhão*, cujas componentes dependem exclusivamente da velocidade em P_1. Nota-se que o vetor turbilhão, que passa por P_1, tem dimensão de freqüência $[T^{-1}]$.

Cabe aqui, introduzir o conceito de *escoamento a potencial de velocidades*. Se u.dx+v.dy+w.dz for uma diferencial exata, existe uma função[9] $\varphi(x,y,z)$ tal que:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (30)$$

Portanto, o vetor turbilhão, neste caso, fica:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \quad (31)$$

o que significa que o movimento é *irrotacional*, e a equação 10 (da continuidade) fica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\nabla}\rho)(\vec{\nabla}\varphi) + \rho(\nabla^2\varphi) = 0 \quad (32)$$

Logo, no caso de fluidos incompressíveis ($\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$) e homogêneos ($\vec{\nabla}\rho=0$), escoando a potencial de velocidades, a equação de *Laplace*[10] ($\nabla^2\varphi=0$) é satisfeita.

❸ *Deformação*. Neste caso, a distância infinitesimal ΔS, entre P_1 e P_2 tem componentes Δx, Δy e Δz, cujos valores são:

---

9 A funçao $\varphi(x,y,z)$ é chamada *função potencial*.

10 Marquês de Laplace (1749-1827). Matemático e astrônomo francês. Mostrou que as órbitas planetárias, como calculadas por Newton, são dinamicamente estáveis e desenvolveu toda uma teoria sobre a ação das marés. Também formulou a chamada *Hipótese da Nebulosa*, segundo a qual o sistema solar se condensou a partir de uma nuvem de gás e publicou trabalhos importantes sobre a *Teoria das Probabilidades*.

$$\begin{cases} \Delta x = u_d.dt \\ \Delta y = v_d.dt \\ \Delta z = w_d.dt \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta x}{u_d} = \frac{\Delta y}{v_d} = \frac{\Delta z}{w_d} \Rightarrow \frac{\partial(\Delta S)}{\partial t} = \sqrt{u_d^2 + v_d^2 + w_d^2} \tag{33}$$

Considere-se a expressão seguinte:

$$\varphi(x,y,z) = (\Delta S)^T \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial(x,y,z)} \right) (\Delta S) = \begin{pmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \tag{34}$$

Pode-se verificar que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial(\Delta x)} = u_d; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial(\Delta y)} = v_d; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial(\Delta z)} = w_d \tag{35}$$

Por ser um escoamento a potencial de velocidades, o movimento é irrotacional. No entanto, a velocidade relativa entre os dois pontos não é necessariamente nula, o que produz uma deformação na partícula em torno do ponto P_1.

5. FORMULAÇÕES DECORRENTES DA EQUAÇÃO DE EULER

Há duas equações importantes, que surgem como conseqüência da equação de Euler: a *Equação de Lagrange*, e a de *Bernoulli*, sendo que a forma geral desta última já foi apresentada aqui.

5.1. A Equação de Lagrange

Seja um escoamento a potencial de forças $\psi(x,y,z)$, tal que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{36}$$

onde X, Y e Z são as forças externas (por unidade de massa) da equação 17, e seja o potencial de velocidades $\varphi(x,y,z)$, como foi definido na equação 30. Então, a equação de Euler fica:

$$\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} - g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Mas, pode-se facilmente perceber que:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]}{\partial x} \\ \frac{\partial\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]}{\partial y} \\ \frac{\partial\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial(V)^2}{\partial x} \\ \frac{\partial(V)^2}{\partial y} \\ \frac{\partial(V)^2}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{38}$$

Então, a equação 37 se reduz a:

$$\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} - g \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial(V)^2}{\partial x} \\ \frac{\partial(V)^2}{\partial y} \\ \frac{\partial(V)^2}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial t} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Sob a suposição de que a densidade ρ é apenas função da pressão p, ou seja:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial\left(\int\frac{dp}{\rho}\right)}{\partial x}; \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial\left(\int\frac{dp}{\rho}\right)}{\partial y}; \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial\left(\int\frac{dp}{\rho}\right)}{\partial z} \tag{40}$$

é permitido que se escreva:

$$\frac{\partial\left(\int\frac{dp}{\rho} + \psi + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\int\frac{dp}{\rho} + \psi + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\int\frac{dp}{\rho} + \psi + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}{\partial z} = 0 \tag{41}$$

Portanto, a expressão $\int\frac{dp}{\rho} + \psi + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}$ independe do ponto (x,y,z) considerado, sendo dependência exclusiva do tempo t. Finalmente, se o movimento for permanente, conclui-se que:

$$\int\frac{dp}{\rho} + \psi + \frac{V^2}{2} = \text{Constante (espacial e temporalmente).} \tag{42}$$

A expressão acima demonstra que a integração pode ser feita entre dois pontos quaisquer (não necessariamente pertencentes à mesma trajetória), se as forças e as velocidades forem oriundas de um potencial.

5.2. A Equação de Bernoulli

A equação 23, de Bernoulli, também pode ser deduzida a partir do conceito de potencial de força. Observando que dx=u.dt, dy=v.dt e dz=w.dt e pré-multiplicando a equação 17 pelo vetor linha (dx dy dz), obtém-se:

$$(dx \quad dy \quad dz)\left\{\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{\partial p}{\partial z}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z-g\end{pmatrix}\right\}+dt(u \quad v \quad w)\left\{\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial t}\\ \frac{\partial v}{\partial t}\\ \frac{\partial w}{\partial t}\end{pmatrix}\right\}=0 \qquad (43)$$

ou seja:

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)-X.dx-Y.dy-(Z-g)dz+\left(u\frac{du}{dt}+v\frac{dv}{dt}+w\frac{dw}{dt}\right)dt=0 \qquad (44)$$

Notando que

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=dp-\frac{\partial p}{\partial t}dt \qquad (45)$$

e que, do conceito de velocidade média local (resultante no filete),

$$\left(u\frac{du}{dt}+v\frac{dv}{dt}+w\frac{dw}{dt}\right)dt=V.dV \qquad (46)$$

A equação 44 fica:

$$\frac{1}{\rho}\left(dp-\frac{\partial p}{\partial t}dt\right)-X.dx-Y.dy-(Z-g)dz+V.dV=0 \qquad (47)$$

Porém, essa equação não é integrável em qualquer ponto do escoamento, pois dx, dy e dz não são independentes como na equação de Lagrange. Se houver uma função potencial de forças $\psi(x,y,z)$, pode-se escrever:

$$X=-\frac{\partial\psi}{\partial x};\quad Y=-\frac{\partial\psi}{\partial y};\quad Z-g=-\frac{\partial\psi}{\partial z}\ \Rightarrow d\psi=-X.dx-Y.dy-(Z-g)dz \qquad (48)$$

Logo;

$$\frac{1}{\rho}\left(dp-\frac{\partial p}{\partial t}dt\right)+d\psi+V.dV=0 \qquad (49)$$

que, no caso de escoamento permanente, se reduz a:

$$\frac{dp}{\rho}+d\psi+V.dV=0\Rightarrow\int_{p_o}^{p}\frac{dp}{\rho}+\left(\psi-\psi_o\right)+\frac{1}{2}\left(V^2-V_o^2\right)=0 \qquad (50)$$

Esta equação é de importância crucial no estudo dos escoamentos e foi estabelecida por Bernoulli[11], passando a ser conhecida por *Equação de Bernoulli*. Nunca se deve esquecer que esta equação só é aplicável ao longo de uma trajetória, e não a todos os pontos do escoamento. Sua maior aplicação se verifica para fluidos incompressíveis, quando X=Y=Z=0, ou seja, quando a única força externa à qual o escoamento está submetido é o peso da massa líquida. Neste caso, ψ=gz, o que implica que:

$$\int_{p_o}^{p}\frac{dp}{\rho}+\int_{z_o}^{z}g.dz+\int_{V_o}^{V}V.dV=\frac{p-p_o}{\rho}+g\left(z-z_o\right)+\frac{V^2-V_o^2}{2}=0\ \Rightarrow\ z+\frac{p}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}=\text{Constante.} \qquad (51)$$

---

[11] Daniel Bernoulli. Hidráulico suíço, filho do matemático Johann Bernoulli (1676-1748) que resolveu o problema da *braquistócrona*, e sobrinho do famoso matemático Jakob Bernoulli (1654-1705) que introduziu o termo *integral* no Cálculo. Daniel publicou seu teorema pela primeira vez em 1738, em seu livro *Hydrodynamica*.

6. CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO

As cinco equações que compõem o sistema hidrodinâmico podem ou não ser passíveis de serem resolvidas[12]. Em todo caso, se houver solução (tanto analítica quanto numérica) factível, estas conterão constantes de integração, originárias das condições iniciais e de contorno (em um sentido lato, ambas costumam ser chamadas *condições de fronteira*). Nos problemas práticos relativos à Hidráulica, envolvendo líquidos ideais, as condições de contorno são normalmente definidas pelas superfícies livres e/ou pelas paredes sólidas que limitam espacialmente o escoamento.

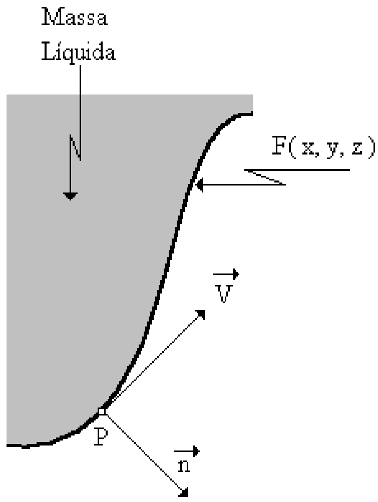


Figura 7- Escoamento e parede confinante.

① *Limites sólidos*. A figura 7 mostra uma parede fixa que confina o espaço ocupado pelo líquido em escoamento. Seja F(x,y,z), a equação dessa parede, e $\vec{V} = \left(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right)$ a velocidade do líquido no ponto P. O versor $\vec{n}$, normal à superfície da parede no ponto P é $\vec{n} = \alpha\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$, onde α é um fator de escala, cuja função é tornar unitário o módulo do vetor. O confinamento imposto pela parede impõe que a componente da velocidade na direção normal a ela seja nula, ou seja:

$$\vec{V}.\vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad (52)$$

② *Superfícies livres*. A condição de contorno, nesse caso, é simplesmente a imposição de que a pressão na superfície seja constante. Essa imposição tem como conseqüência o fato (análogo ao caso anterior) de que $u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z} = 0$, o que é fácil de ser verificado.

7. DISTRIBUIÇÃO DAS PRESSÕES

Por ser uma igualdade vetorial, a expressão $m\vec{A} = \sum\vec{F}$ é válida ao ser projetada em qualquer direção; por exemplo, nos eixos coordenados intrínsecos ligados à trajetória de uma partícula P, como ilustra a figura 8, na qual a tangente t à trajetória é orientada segundo a *regra da mão direita*, n é a normal ao plano osculador e b se encontra no eixo binormal. Na figura, C é o centro do raio de curvatura R instantâneo da trajetória.

As equações de Euler, então ficam:

① *Eixo tangente à trajetória (x)*. Fica praticamente inalterada:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{dV}{dt} \qquad (53)$$

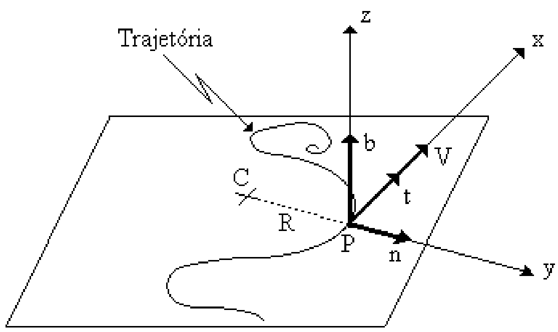


Figura 8- Orientação intrínseca de uma trajetória.

[12] Há também casos nos quais o sistema dinâmico permite a existência de múltiplas soluções.

② *Eixo normal à trajetória (y)*. O termo da aceleração é simplesmente substituído pela aceleração centrípeta[13]:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y + \frac{V^2}{R} \qquad (54)$$

③ *Eixo ortogonal ao plano instantâneo da trajetória, ou eixo binormal (z)*. Como não há projeção das acelerações da velocidade no eixo z, exceto a gravitacional, a equação fica, simplesmente:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} = Z - g \qquad (55)$$

A partir dessas equações, pode-se tirar as seguintes conclusões relativas à distribuição das pressões nos escoamentos, conclusões essas conhecidas como regras de Bresse:

❶ A variação vertical das pressões obedece a lei hidrostática, em escoamentos cujas trajetórias são confinadas a planos horizontais, pois

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho}\int_{p_o}^{p} dp = -g\int_{z_o}^{z} dz \quad \Rightarrow \quad p - p_o = \rho g(z_o - z) \qquad (56)$$

❷ As pressões se distribuem segundo a lei hidrostática nos escoamentos retilíneos e uniformes, devido ao fato de que as acelerações são nulas, resultando em

$$\rho\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z-g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \rho\frac{\vec{F}}{m} = \vec{\nabla} p \qquad (57)$$

que são condições de equilíbrio hidrostático.

❸ Se o escoamento de um líquido ideal causar, nas partículas, movimentos idênticos aos que estas teriam se estivessem sob a ação exclusiva das forças externas, a pressão será constante em toda a massa líquida, em um instante qualquer, porque

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z-g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dy} \\ \frac{dw}{dz} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p(x,\ y,\ z) = \text{Constante.} \qquad (58)$$

❹ Se o escoamento de um líquido natural for dotado de movimentos lentos, a distribuição das pressões é praticamente hidrostática, pois $V \approx 0$, o que faz com que as forças inerciais possam ser desprezadas, recaindo no caso ❷.

❺ A distribuição das pressões em uma seção transversal ao escoamento seguirá a lei hidrostática, se as trajetórias das partículas atravessarem normalmente essa seção, e se as

[13] O termo da aceleração fica em sentido contrário, pois deve sempre ser lembrado que a aceleração *centrípeta* ocorre no sentido de *atrair* a partícula para o centro do raio de curvatura da trajetória, embora haja uma reação *centrífuga* sobre a partícula, orientada no sentido de *escapar* da trajetória.

curvaturas[14] dessas trajetórias forem muito pequenas nas cercanias da seção, pois isso também faz que se recaia no caso ❷.

8. APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI

O teorema de Bernoulli, que afirma que *a soma das alturas (geométrica, piezométrica e cinética) é constante ao longo de qualquer linha de corrente*, nada mais é que o princípio de conservação de energia, sendo que cada uma dessas alturas (também denominadas *cargas*) não passam de formas de energia (potencial, de pressão e cinética) por unidade de peso, o que torna a equação de Bernoulli uma ferramenta utilíssima na resolução de problemas relativos à engenharia hidráulica.

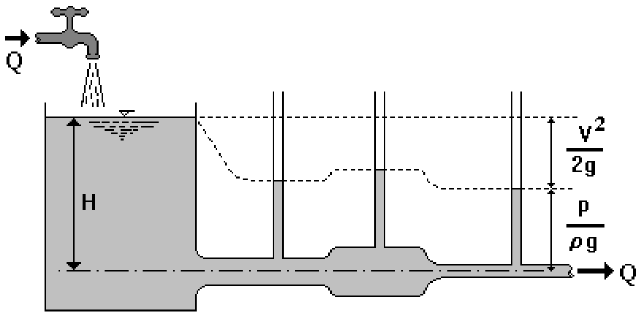


Figura 9- Conservação da energia total.

Duas experiências interessantes que ilustram este importante teorema, idealizadas e realizadas por Froude em 1875, são mostradas a seguir.

A primeira demonstração utiliza piezômetros instalados em uma tubulação lisa, horizontal e de diâmetro variável, que parte de um reservatório no qual o nível foi mantido constante, como ilustra a figura 9. Pode-se observar que a água dos piezômetros sobe mais nas seções de diâmetro maior, pois nelas a velocidade é menor, resultando menor carga cinética e, portanto, maior carga piezométrica. A constância da carga total pode ser verificada pela equação de Bernoulli, uma vez que as seções são conhecidas. Pode-se também calcular a vazão desta forma.

No segundo experimento, são utilizados vasos providos de bocais, chamados *vasos de Froude*, em sua homenagem. Os bocais são justapostos, com a água passando de um para o outro, como está esquematizado na figura 10.a. A pressão exercida pelo líquido na seção S_2 é $\rho g h_2$, ao passo que se admite uma pressão igual a $\rho g h_1$ na seção S_1. Tomando como referência o eixo dos bocais e aplicando o teorema de Bernoulli, obtém-se:

$$H = \frac{V_1^2}{2g} + h_1 = \frac{V_2^2}{2g} + h_2 \qquad (59)$$

A seção S_1 do bocal é construída de tal forma que reduz toda a carga H à energia cinética, ou seja:

$$\frac{V_1^2}{2g} = H \qquad (60)$$

que é a conhecida equação cinemática de *Torricelli*[15]. Portanto, resulta que $h_1 = 0$, o que implica que a pressão no bocal é a atmosférica. Desta forma, pode-se separar os vasos (figura

---

[14] Curvatura λ da função f no ponto x=a é definida como o inverso do raio de curvatura, ou seja:

$$\lambda = \frac{\dfrac{d^2[f(a)]}{\partial x^2}}{\left\{1+\left[\dfrac{df(a)}{dx}\right]^2\right\}^{3/2}}$$

[15] Torricelli (1608-1647). Matemático italiano. Conhecido como sendo o inventor do barômetro de mercúrio. Seu teorema se aplica a bocais e orifícios nos quais $V = \sqrt{2gh}$.

10.b) que a água continuará para o outro bocal por meio de um jato, sem que haja água escapando para o exterior dos bocais.

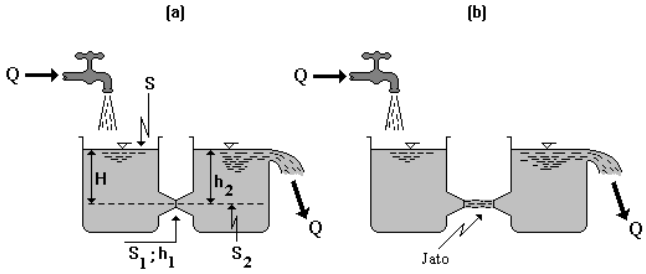


Figura 10- A experiência dos vasos de Froude.

8.1. Extensão do Teorema de Bernoulli aos Líquidos Reais

8.1.1. O coeficiente de Coriolis

Seja uma corrente líquida que atravessa perpendicularmente uma seção S, na qual o escoamento se apresenta com uma distribuição qualquer de velocidades transversais a ela, como é mostrado na figura 11. Sendo dQ = v.dS a vazão que um filete elementar, dotado de velocidade média local v no ponto em que o filete atravessa a seção, a potência[16] total do filete neste ponto é:

$$P = \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) \rho g . dQ \qquad (61)$$

Portanto, se o fluido for incompressível, a pressão for uniformemente distribuída em S e z for a cota do centro geométrico da seção em relação a um plano horizontal de referência, a potência total de toda a corrente líquida é:

$$P_t = \rho g \int_S \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) v.dS \quad \Rightarrow \quad P_t = (p + \rho g z)Q + \rho g \int_S \frac{v^2}{2g} v.dS = (p + \rho g z)Q + \frac{\rho}{2} \int_S v^3 dS \qquad (62)$$

Então, a energia total por unidade de peso[17] fica:

$$E = \frac{P_t}{\rho g Q} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2gQ} \int_S v^3 ds \qquad (63)$$

Como pode ser visto na figura 11, $v_{máx} = V + \varepsilon$. Alguns escoamentos em tubos de seção circular, como será visto mais adiante, apresentam um perfil de velocidades parabólico, onde $v = (V + \varepsilon)\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$, onde V é a velocidade média na seção e R é o raio da mesma, suposta circular. Logo,

$$V = \frac{\int_S v.dS}{S} = \frac{2(V + \varepsilon)}{R^2} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r.dr = \frac{V + \varepsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad V = \varepsilon \qquad (64)$$

Portanto,

$$v = 2V\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (65)$$

o que conduz a:

$$\int_S v^3 dS = 16\pi V^3 \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3 r.dr = 2\pi R^2 V^3 = 2QV^2 \qquad (66)$$

que substituída na equação 63 fornece:

---

[16] Potência é a taxa de dissipação de energia, ou seja, a razão da energia pelo tempo.

[17] Também chamada de *energia específica*.

$$E = z + \frac{p}{\rho g} + \alpha\left(\frac{V^2}{2g}\right); \quad \alpha = 2 \text{ para seções circulares.} \qquad (67)$$

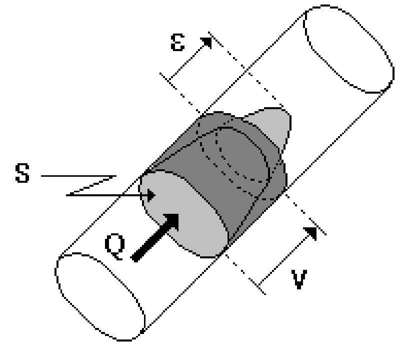


Figura 11- Distribuição de velocidades em uma seção.

O valor de α, chamado *coeficiente de Coriolis* depende, portanto, da distribuição das velocidades, entre outras coisas. Nos escoamentos turbulentos em condutos forçados, seu valor varia normalmente entre 1,05 e 1,10. Como nesses casos a velocidade média raramente ultrapassa 4 m/s, o erro cometido no cálculo da carga total, ao se adotar α=1, quase nunca ultrapassa 8 cm. Porém, nos escoamentos à superfície livre, o valor de α é mais alto que nos escoamentos forçados, devido à distribuição mais complexa das velocidades na seção, além de ser dotado de velocidades muito mais altas. Não é raro uma velocidade média de 10 m/s e coeficiente de coriolis igual a 1,5 em canais, o que pode ocasionar um erro de 2,50 metros no cálculo da carga total, o que é inadmissível.

Portanto, o coeficiente de Coriolis é:

$$\alpha = \frac{S^2 \int_S v^3 ds}{\left(\int_S v.ds\right)^3} \qquad (68)$$

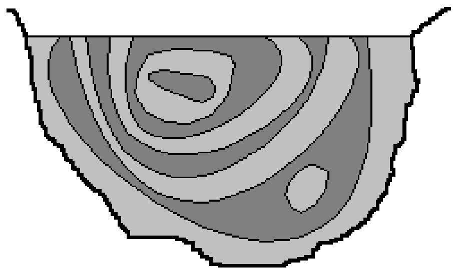


Figura 12- Isótacas de uma seção de canal.

Ao se fazer as medições de velocidades em uma determinada seção transversal de um canal, obtém-se as *isótacas*[18], que delimitam as áreas hachuradas da figura 12. O coeficiente de Coriolis pode, então, ser calculado através de qualquer método de integração numérica, como o seguinte:

$$\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \Delta S_i\right)\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(\frac{v_{i+1}+v_i}{2}\right)^3 \Delta S_i\right]\right\}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(\frac{v_{i+1}+v_i}{2}\right)\Delta S_i\right]\right\}^{-3} \qquad (69)$$

na qual $\left(\frac{v_{i+1}+v_i}{2}\right)$ é a velocidade média da seção ΔS_i.

8.1.2. Perda de carga

Mesmo ao se levar em conta a distribuição de velocidades e, a partir daí, adotar-se um valor criterioso do coeficiente de Coriolis, observa-se que os escoamentos reais não obedecem rigorosamente a equação de Bernoulli, devido aos efeitos da viscosidade e da turbulência, resultando em dissipação de energia em forma de calor. Nos escoamentos reais, a carga total dimunui na direção do escoamento, como mostrado na figura 13.

Portanto, para escoamentos reais, a equação de Bernoulli fica:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \alpha_A \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \alpha_B \frac{V_B^2}{2g} + \Delta h \qquad (70)$$

[18] Isótaca = ×σοϖ (igual) + ταξ∩ϖ (velocidade). São as curvas que representam as regiões de uma seção, dotadas de velocidades iguais.

O termo Δh recebe a denominação de *perda de carga*.

9. INTERCÂMBIO DE IMPULSO

Cabe aqui, esclarecer alguns aspectos terminológicos de dois conceitos importantes no entendimento do fenômeno do escoamento.

① *Impulso ou impulsão*. O impulso de uma força pontual F é o produto da mesma pelo intervalo de tempo que dura sua ação.

② *Quantidade de movimento*. A quantidade de movimento da massa m é o produto dessa massa por sua velocidade. Newton[19] denominou-a *quantity of motion*, embora o termo preferido pelos autores atuais de língua inglesa seja o termo latino *momentum*. Algumas traduções mal-feitas trazem este termo inglês como “momento”, mas o que corresponde ao nosso “momento” é *moment* (Ex.: *moment of inertia*, ou seja “momento de inércia”). Alguns autores anglófonos costumam denominá-lo *linear momentum*, para diferenciá-lo de *angular momentum* (sinônimo de *moment of momentum*) que corresponde ao nosso “momento cinético”. Esta deplorável confusão entre *momentum* e *moment* criou, entre nós, a locução imprópria de “momento angular”, tradução errônea de *angular momentum*, quando o correto seria “momentum angular”, “quantidade de movimento angular”, “momento de quantidade de movimento” ou “momento de momentum”.

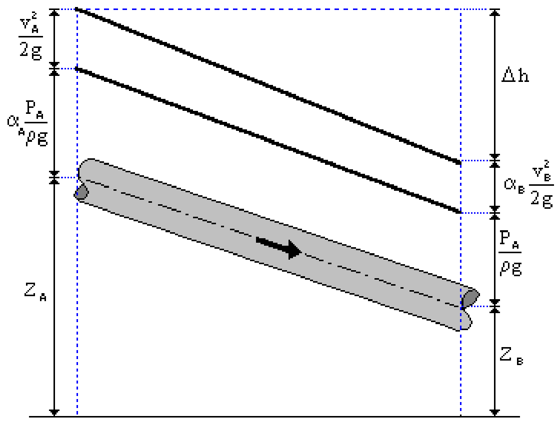


Figura 13- Representação da perda de carga.

9.1. O Teorema de Euler

Pode-se expressar o princípio fundamental da mecânica clássica, aplicado à massa pontual m, como:

> *"A derivada em* relação *ao tempo, da quantidade de movimento de uma massa m dotada de velocidade V equivale à resultante de todas as forças externas aplicadas a essa massa."*

Tal lei pode ser verificada da seguinte maneira:

$$\text{impulso} = \text{quantidade de movimento} \;\Rightarrow\; \sum \vec{F}_{ext}\, dt = m\vec{V} \;\Rightarrow\; \sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\left(m\vec{V}\right)}{dt} \qquad (71)$$

No caso em que m é constante, a expressão acima nada mais é que a lei básica de Newton que afirma que a somatória das forças é igual ao produto da massa pela aceleração. Este teorema pode ser aplicado ao filete líquido incompressível mostrado na figura 14, na qual o volume elementar dVol é transportado da posição A para B, durante o intervalo de tempo dt, em movimento permanente.

[19] Isaac Newton (1642-1727). Matemático inglês cujas contribuições tanto em Matemática como em Física mudaram decisivamente a concepção e direção dessas ciências. Descobriu o método analítico que forma a base do Cálculo e formulou importantes leis sobre o estudo da Mecânica. Após três séculos, sua teoria gravitacional continua válida, embora seja hoje compreendida como um caso particular no qual a distância entre os corpos é relativamente grande e a massa de um desses corpos é comparativamente pequena, como no movimento de translação da Terra em torno do Sol.

A conservação da quantidade de movimento implica que a diferença entre a quantidade de movimento que entra pela seção dS_1 e a que sai por dS_2 é igual à variação da quantidade de movimento do volume envolto pela superfície (1)→(2)→(4)→(3)→(1). Como a equação da conservação de massa fornece $dm=\rho.dVol=\rho dS_A.V_A dt=\rho dS_B.V_B dt=\rho dQ.dt$, deduz-se que:

$$d\left(m\vec{V}\right)=\rho.dQ\left(\vec{V}_B-\vec{V}_A\right)dt \Rightarrow \sum\vec{F}_{ext}=\rho\left(\vec{V}_B-\vec{V}_A\right)dQ \quad (72)$$

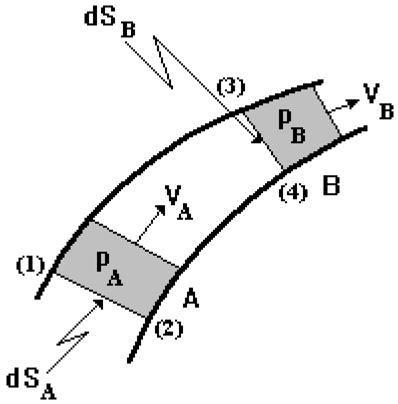


Figura 14- Transporte de quantidade de movimento de A para B.

Esta equação, conhecida como *Equação de Euler*, não leva em consideração as forças internas, uma vez que o sistema formado por elas tem resultante nula. No campo gravitacional, essas forças são: ① o peso da massa líquida $d\vec{F}_g$; ② as forças de pressão $d\vec{F}_p$ sobre as paredes laterais do filete e sobre as seções de entrada e de saída do volume; e ③ as forças de atrito $d\vec{F}_r$ sobre as paredes laterais do filete.

Portanto, a equação de Euler fica:

$$d\vec{F}_g+d\vec{F}_p+d\vec{F}_r=\int_S \rho\vec{V}\vec{V}.\vec{n}.ds \quad (73)$$

onde $\vec{n}$ é o versor da direção e sentido do escoamento. Através deste teorema, é possível determinar a resultante das forças externas, conhecendo-se a distribuição de velocidades sobre a superfície fechada que envolve o líquido (independente se ideal ou real), sem se preocupar com o que ocorre em seu interior.

9.2. Aplicações do Teorema de Euler

Seja um certo volume envolto por uma superfície S fechada e fixa, através da qual um fluido se movimenta em regime permanente, como ilustra o esquema da figura 15.

A quantidade de movimento que sai pela superfície elementar ds, por unidade de tempo é:

$$\vec{v}\frac{dm}{dt}=\vec{v}\rho.dQ=\vec{v}\rho\left(v.dS\right)=\rho\vec{v}\vec{v}.\vec{n}dS \quad (74)$$

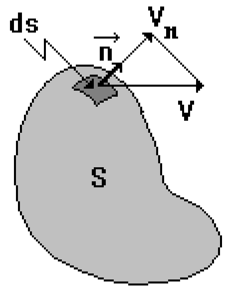


Figura 15- Líquido contido em uma superfície fechada.

Então, a variação da quantidade de movimento do fluido contido em S, durante o intervalo de tempo dt, é dado por:

$$d\left(m\vec{v}\right)=dt\int_S\rho\vec{v}\vec{v}.\vec{n}dS=dt\int_S\rho v_n dS\vec{v} \Rightarrow \sum\vec{F}_{ext}=\int_S\rho v_n dS\vec{v} \quad (75)$$

A equação de Euler foi apenas deduzida a partir do escoamento ao longo de um filete de seção transversal infinitesimal. Torna-se, portanto, imperativo que se defina a aplicação do teorema às correntes líquidas. Pode-se imaginar a corrente como sendo composta de filetes que não se cruzam, sendo nula a velocidade em toda a superfície lateral da corrente, como pode ser observado na figura 16. Chega-se, portanto, à seguinte expressão:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \int_{S_2} \rho v_n \vec{v}\, ds - \int_{S_1} \rho v_n \vec{v}\, ds \tag{76}$$

Se o fluido for incompressível e a seção transversal for normal à direção geral da corrente, o valor de v_n é igual ao módulo de v. Neste caso, a variação da quantidade de movimento no volume delimitado por S_1, S_2 e as paredes laterais, fica $\rho\int_{S_1}^{S_2} v^2 ds$. Entretanto, é preferível que se utilize a velocidade média V, para efeitos de aplicação prática. Portanto,

$$\beta\rho V^2 S = \rho\int_S v^2 ds \Rightarrow \beta = \frac{\int_S v^2 ds}{V^2 S} = \frac{S\int_S v^2 ds}{\left(\int_S v ds\right)^2} \tag{77}$$

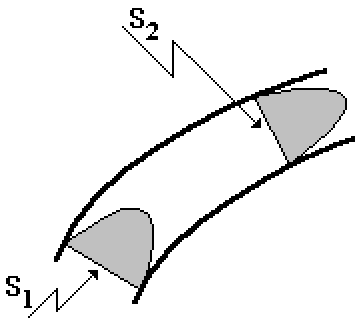


Figura 16- Distribuição de velocidades em uma corrente.

sendo que β é o coeficiente de quantidade de movimento.

É deixado como exercício, a aplicação desta relação ao perfil parabólico (equação 65), que resulta em β = 4/3. Portanto, a quantidade de movimento real é maior que a quantidade de movimento do escoamento fictício médio, resultando que a fórmula de Euler aplicada às correntes líquidas fica:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \rho Q\left(\beta_2 V_2 - \beta_1 V_1\right) \tag{78}$$

10. ESCOAMENTO DOS FLUIDOS VISCOSOS

Até aqui, não se preocupou com o que ocorre no interior dos fluidos em movimento. Entretanto não apenas o atrito entre o fluido e as paredes dos condutos são relevantes, como também o atrito entre os filetes que compõem a corrente.

10.1. Viscosidade

Viscosidade é o atrito que se observa no interior de um fluido real em escoamento, causando uma força de arrasto entre duas camadas adjacentes. É devido a este efeito que os escoamentos de fluidos naturais se apresentam com uma distribuição não-uniforme de velocidades. Para se compreender este fenômeno, se faz uma analogia com o movimento relativo de duas placas planas separadas por uma distância infinitesimal Δn, como as da figura 17. Enquanto a placa inferior está em repouso, a superior se move horizontalmente em movimento uniforme, arrastando as partículas líquidas que estão em contato com ela, em conseqüência do atrito; ao passo que as partículas que estão

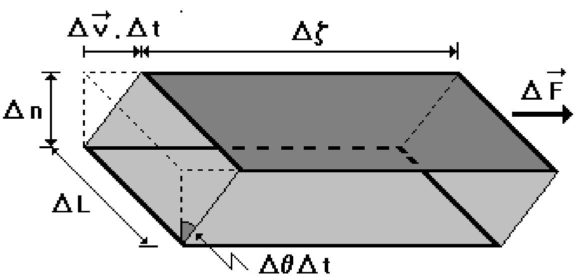


Figura 17- Exemplificação da viscosidade.

em contato com a placa inferior permanecem imóveis, pelo mesmo motivo, admitindo que o líquido se movimenta laminarmente. Tem-se observado experimentalmente, que a velocidade varia linearmente de zero até Δv. A força de resistência ao deslocamento da placa é proporcional à velocidade relativa e à área da placa, e inversamente proporcional à distância entre as placas, ou seja:

$$\Delta\vec{F} = \mu\Delta S\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta n} \quad\Rightarrow\quad \frac{d\vec{F}}{dS} = \mu\frac{d\vec{v}}{dn} \quad\Rightarrow\quad \tau = \mu\frac{d\vec{v}}{dn} \qquad (79)$$

O coeficiente μ $[ML^{-1}T^{-1}]$ é chamado *coeficiente de viscosidade absoluta*, que depende da temperatura, pressão e da natureza do líquido, e τ é a tensão de cisalhamento. Com freqüência se emprega o *coeficiente de viscosidade cinemática* $\nu = \mu/\rho$ $[L^3T^{-1}]$.

Pode-se notar que $\frac{d\vec{v}}{dn}$ é uma medida da deformação do líquido, uma vez que

$$\frac{d\vec{v}}{dn} = \frac{d\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)}{dn} = \frac{d\left(\frac{d\zeta}{dn}\right)}{dt} = \frac{d(tg\theta)}{dt} = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt} \qquad (80)$$

que para pequenas deformações ($\cos^2\theta \approx 1$) se reduz a

$$\frac{d\vec{v}}{dn} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (81)$$

10.2. Viscosidade dos Fluidos Reais

Os fluidos que se comportam da forma descrita são chamados de *newtonianos*. Há, porém, alguns outros que não têm comportamento similar. Os chamados fluidos *não-newtonianos* podem ser classificados em três grupos:

① Fluidos que apresentam características simultâneas de sólidos e líquidos. Um exemplo característico dos fluidos deste grupo é o piche que, quando em escoamento à temperatura ambiente, apresenta características de um fluido de grande viscosidade, porém se verifica que surge uma ruptura no piche, ao sofrer o impacto de uma batida brusca, como se fosse um sólido. O piche se enquadra no grupo dos fluidos *viscoelásticos*.

② Fluidos nos quais a relação entre a taxa de deformação e a tensão de cisalhamento depende das condições iniciais do escoamento. A *viscosidade aparente* desses fluidos não pode ser descrita analiticamente através de uma relação entre θ e τ, pois depende também da história prévia do escoamento.

③ Fluidos nos quais a taxa de deformação é apenas função da tensão de cisalhamento.

Aqui será feita apenas uma abordagem sumária dos fluidos do terceiro grupo, pois apresentam uma *viscosidade aparente*, com um significado análogo ao da viscosidade propriamente dita. Pode-se, portanto, abordar conjuntamente os fluidos newtonianos e os do terceiro grupo que, por este motivo, é chamado de grupo dos *fluidos não-newtonianos viscosos*. Já o tratamento analítico do escoamento de fluidos pertencentes aos dois primeiros grupos constitui um capítulo especial da Mecânica dos Fluidos, chamada *Reologia*[20].

A figura 18 mostra o comportamento da taxa de deformação com a tensão de cisalhamento, para diferentes tipos de fluidos, a saber:

---

[20]Reologia = ρε′ω (escorrimento) + λ| γοϖ (discurso).

① *Fluidos newtonianos*. Seu comportamento é mostrado na figura 18-a, e pode ser descrito como:

$$\tau = \mu \dot{\theta} \tag{82}$$

A água é um fluido newtoniano.

② *Plásticos de Bingham*. O escoamento (figura 18-b) de fluidos como lama, pastas dentifrícias e tintas a óleo, entre outros, somente se inicia quando a tensão de cisalhamento atinge um valor mínimo chamado *tensão de escoamento* (τ_o), quando passa a ter um comportamento linear, ou seja:

$$\tau = \tau_o + \mu_o \dot{\theta} \tag{83}$$

equação na qual μ_o é chamada de *viscosidade plástica*.

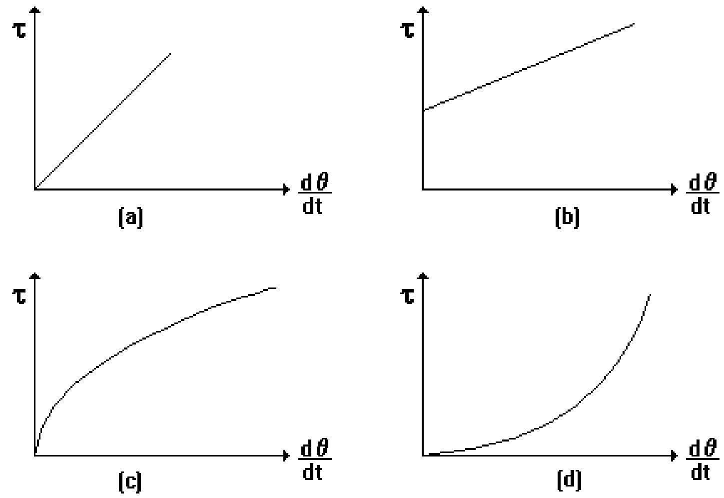


Figura 18- Comportamento viscoso de diferentes tipos de fluidos.

③ *Fluidos pseudo-plásticos*. Se comportam da maneira ilustrada na figura 18-c. São representados, principalmente, pelos derivados de celulose, soluções de polímeros elevados e suspensões de partículas assimétricas. Embora não apresentem tensão de escoamento, a relação entre a taxa de deformação e a tensão não é linear, apresentando-se da seguinte forma:

$$\tau = \lambda \left(\dot{\theta} \right)^n \tag{84}$$

com n < 1, e λ constantes que dependem da natureza do fluido. Define-se como *viscosidade aparente* μ_o, a expressão:

$$\mu_{ap} = \frac{\tau}{\dot{\theta}} = \lambda \left(\dot{\theta} \right)^{n-1} \tag{85}$$

④ *Fluidos dilatantes* (figura 18-d). São fluidos menos comuns que os pseudoplásticos, apresentando comportamento análogo a estes, porém com n > 1.

O comportamento dos fluidos viscosos pode, então, ser resumido na seguinte fórmula:

$$\tau = a + b \left(\dot{\theta} \right)^n \tag{86}$$

com os valores de k e n da tabela 1.

Fluido	**a**	**b**	**n**
Newtoniano	0	μ	1
Plástico de Bingham	τ_o	μ_o	1
Pseudoplástico	0	λ	<1
Dilatante	0	λ	>1

Tabela 1- Parâmetros de alguns tipos de fluidos viscosos.

Levando em conta as forças viscosas, a equação de Euler (18), pode ser assim escrita:

$$\rho\left(\vec{F}_{ext}-\frac{d\vec{V}}{dt}\right)=\vec{\nabla}p+\vec{F}_{\mu} \tag{87}$$

em que $\vec{F}_{\mu}$ é o conjunto das forças de origem viscosa.

10.3. O Teorema do Tetraedro dos Esforços

Seja o tetraedro de arestas infinitesimais da figura 19, onde o plano ABC é definido pelos cossenos diretores de seu versor normal $\vec{n}$: $\cos\hat{n}_x$, $\cos\hat{n}_y$ e $\cos\hat{n}_z$. Sejam O a origem dos eixos coordenados e dS a área da face ABC. Logo as áreas das outras três faces são:

$$\begin{cases}\Delta OBC = dS\ \cos\hat{n}_x\\ \Delta OAC = dS\ \cos\hat{n}_y\\ \Delta OAB = dS\ \cos\hat{n}_z\end{cases} \tag{88}$$

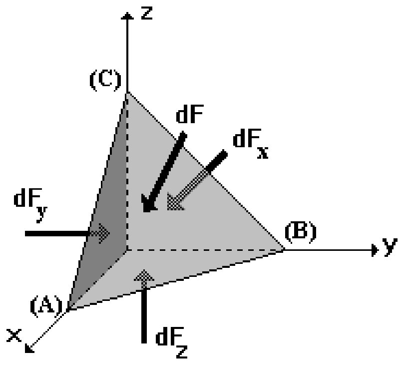


Figura 19- O tetraedro dos esforços.

Para que o tetraedro esteja em equilíbrio, é necessário que:

$$d\vec{F}=d\vec{F}_x+d\vec{F}_y+d\vec{F}_z \tag{89}$$

ou seja:

$$\vec{T}=\vec{T}_x\cos\hat{n}_x+\vec{T}_y\cos\hat{n}_y+\vec{T}_z\cos\hat{n}_z \tag{90}$$

sendo que T, T_X, T_Y e T_Z são as tensões específicas[21] nas faces ABC, OBC, OAC e OAB respectivamente. Cada uma dessas tensões específicas tem uma componente segundo cada eixo do triedro cartesiano. Como o meio fluido considerado é homogêneo e isotrópico[22], considerando o equilíbrio dos momentos, tem-se:

$$\vec{\tau}=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\hat{n}_x\\ \cos\hat{n}_y\\ \cos\hat{n}_z\end{pmatrix} \tag{91}$$

em que os *sigmas* e *taus* representam as tensões normais e de cisalhamento, respectivamente. Portanto, a tensão oriunda das forças viscosas em um elemento de fluido pode ser representada da forma acima.

11. TENSÕES E DEFORMAÇÕES DE ORIGEM VISCOSA NOS FLUIDOS NEWTONIANOS

Como a água é um fluido newtoniano, aqui será estudado apenas este tipo de relação tensão-deformação. Um corpo rígido pode sofrer movimentos de translação e rotação. Cinematicamente, o que o diferencia de um corpo fluido é sua incapacidade de se deformar.

---

[21] tensões por unidade de superfície.

[22] Homogêneo = ομ| ϖ (semelhante) + γε′νος (origem, natureza). Se diz dos materiais cujas propriedades físicas são uniformemente distribuídas.

Isotrópico = ×σος (igual) + τρ| πος (direção). Se diz de um material cujas propriedades físicas são independentes da direção.

Logo, as forças viscosas conduzem apenas à deformação da massa fluida. Será feita uma analogia com os corpos sólidos deformáveis, para se atingir uma expressão geral do escoamento dos fluidos newtonianos.

Observando as equações 25, 26 e 27, verifica-se que a velocidade de deformação pode ser decomposta em dois tipos:

❶ *Velocidade de deformação linear ou de dilatação*. Altera apenas o comprimento dos eixos, sendo representada pelo seguinte vetor:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\ ;\ \frac{\partial v}{\partial y}\ ;\ \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{92}$$

❷ *Velocidade de deformação angular*. Altera o ângulo dos eixos, segundo o vetor:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\ ;\ \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\ ;\ \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{93}$$

11.1. Tensões Normais

Sabe-se, pela lei de Hooke, que a relação entre as tensões normais e as deformações lineares de um corpo homogêneo e isotrópico leva em conta o efeito da deformação transversal nos dois sentidos ortogonais ao sentido da deformação longitudinal, por uma questão de continuidade e coesão, ou seja:

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\end{pmatrix}=\frac{1}{E}\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{1}{\varsigma} & -\dfrac{1}{\varsigma}\\ -\dfrac{1}{\varsigma} & 1 & -\dfrac{1}{\varsigma}\\ -\dfrac{1}{\varsigma} & -\dfrac{1}{\varsigma} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{pmatrix}=\frac{1+\varsigma}{\varsigma E}\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{pmatrix}-\frac{1}{\varsigma E}\begin{pmatrix}\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\\ \sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\\ \sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\end{pmatrix} \tag{94}$$

na qual ξ, η e ζ são as componentes do deslocamento ao longo das direções x, y e z, respectivamente; E é o Módulo de Elasticidade e ς é o Coeficiente de Poisson[23]. Mas, através da Teoria da Elasticidade, sabe-se que:

$$E=\frac{2(\varsigma+1)}{\varsigma}G \tag{95}$$

em que G é o módulo de torção. Fazendo

$$\begin{cases}\varepsilon=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\\ \overline{\sigma}=\dfrac{1}{3}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)\end{cases} \tag{96}$$

obtém-se:

$$\varepsilon=\frac{3(\varsigma-2)\overline{\sigma}}{2(\varsigma+1)G}\ \Rightarrow\ \overline{\sigma}=\frac{2(\varsigma+1)G\varepsilon}{3(\varsigma-2)}\ \Rightarrow\ \varsigma=\frac{2G\varepsilon+6\overline{\sigma}}{3\overline{\sigma}-2G\varepsilon} \tag{97}$$

Substituindo as equações 93, 94 e 95 na equação 92, obtém-se:

[23] S. D. Poisson (1781-1840). Geômetra e físico francês. Escreveu grande quantidade de tópicos em Magnetismo, Astronomia, nos estudos de Escoamentos Viscosos, Elasticidade, Potencial Gravitacional e na Teoria das Probabilidades.

$$\begin{cases} \sigma_x = 2G\varepsilon_x + \dfrac{3\overline{\sigma}}{1+\varsigma} \\ \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \dfrac{3\overline{\sigma}}{1+\varsigma} \\ \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \dfrac{3\overline{\sigma}}{1+\varsigma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = 2G\varepsilon_x + \dfrac{2G\varepsilon}{\varsigma-2} \\ \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \dfrac{2G\varepsilon}{\varsigma-2} \\ \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \dfrac{2G\varepsilon}{\varsigma-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \overline{\sigma} + 2G\varepsilon_x - \dfrac{2}{3}G\varepsilon \\ \sigma_y = \overline{\sigma} + 2G\varepsilon_y - \dfrac{2}{3}G\varepsilon \\ \sigma_z = \overline{\sigma} + 2G\varepsilon_z - \dfrac{2}{3}G\varepsilon \end{cases} \qquad (98)$$

ou seja:

$$\begin{cases} \sigma_x = \overline{\sigma} + 2G\dfrac{\partial\xi}{\partial x} - \dfrac{2}{3}G\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\right) \\ \sigma_y = \overline{\sigma} + 2G\dfrac{\partial\eta}{\partial y} - \dfrac{2}{3}G\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\right) \\ \sigma_z = \overline{\sigma} + 2G\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} - \dfrac{2}{3}G\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\right) \end{cases} \qquad (99)$$

11.2. Tensões Tangenciais

As tensões de cisalhamento são conseqüências diretas dos momentos torçores, portanto:

$$\begin{cases} \tau_{yz} = G\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial z}\right) \\ \tau_{xz} = G\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right) \\ \tau_{xy} = G\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right) \end{cases} \qquad (100)$$

11.3. Hipóteses de Stokes

Stokes[24] formulou as seguintes hipóteses:

① O módulo de torção de um corpo sólido equivale à viscosidade de um corpo fluido.

② A tensão normal média deve ser substituída pela pressão -p do escoamento.

③ Como as tensões são proporcionais às derivadas temporais das deformações, isso corresponde a substituir $\dfrac{d\xi}{dt}$ por u, $\dfrac{d\eta}{dt}$ por v e $\dfrac{d\zeta}{dt}$ por w.

Portanto, estas hipóteses resultam em:

$$\begin{cases} \sigma_x = -p + 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{2}{3}\mu\vec{\nabla}.\vec{V} \\ \sigma_y = -p + 2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{2}{3}\mu\vec{\nabla}.\vec{V} \\ \sigma_z = -p + 2\mu\dfrac{\partial w}{\partial z} - \dfrac{2}{3}\mu\vec{\nabla}.\vec{V} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \tau_{xy} = \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \tau_{yz} = \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \tau_{xz} = \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \end{cases} \qquad (101)$$

[24] George Stokes (1819-1903). Matemático inglês. Trabalhou a vida toda na Universidade de Cambridge, onde fez grandes contribuições à Hidrodinâmica e à Teoria Eletromagnética da Luz.

11.4. Equilíbrio Dinâmico

A figura 20 mostra as forças de superfície em um elemento de volume de um fluido em movimento.

Aplicando a segunda lei de Newton a esse volume, se obtém:

$$dm\frac{D\vec{V}}{Dt} = g.dm\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x}dx \\ \frac{\partial F_y}{\partial y}dy \\ \frac{\partial F_z}{\partial z}dz \end{pmatrix} \qquad (102)$$

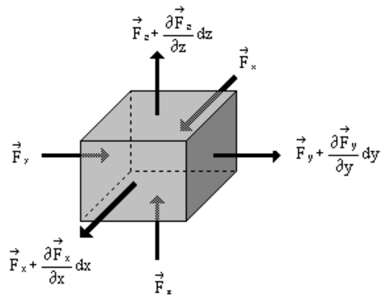


Figura 20- Equilíbrio dinâmico de forças.

Mas, como

$$\begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial x} = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right)dydz \\ \frac{\partial F_y}{\partial y} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right)dxdz \\ \frac{\partial F_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right)dxdy \end{cases} \qquad (103)$$

a equação 100 fica:

$$\begin{cases} \rho\frac{du}{dt} = \rho gX + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) \\ \rho\frac{dv}{dt} = \rho gY + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right) \\ \rho\frac{dw}{dt} = \rho gZ + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right) \end{cases} \qquad (104)$$

Portanto, sob a forma vetorial, a equação 104 pode ser escrita como:

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} - \rho g\vec{e}_g + \vec{\nabla}p - \frac{\mu}{3}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{V}\right) - \mu\nabla^2\vec{V} = 0} \qquad (105)$$

A expressão acima é a equação mais importante da dinâmica dos fluidos newtonianos e foi obtida sucessivamente por Navier (1827), Poisson (1831), Saint-Venant (1843) e Stokes (1845), recebendo a denominação atual de *Equação de Navier-Stokes*■

12. BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

AZEVEDO NETO, J. M. (1973) - **Manual de Hidráulica**. Editora Edgar Blücher, São Paulo (SP).

GARCEZ, L. N. (1960)- **Elementos de Mecânica dos Fluidos - Hidráulica Geral**. Editora Edgar Blücher, São Paulo (SP).

PIMENTA, C. F. (1977)- **Curso de Hidráulica Geral**. Vol. 1, Centro Tecnológico de Hidráulica, São Paulo (SP).

SILVESTRE, P. (1964)- **Hidráulica Geral**. Livros Técnicos e Científicos. Rio de Janeiro, RJ.
VIEIRA, R. C. C. (1971)- **Atlas de Mecânica dos Fluidos - Fluidodinâmica**. Editora Edgar Blücher, São Paulo (SP).

Antônio Cardoso Neto
Engenheiro Civil (Universidade de São Paulo, 1977)
Mestre em Hidráulica e Saneamento (Universidade de São Paulo, 1983)
PhD em Engenharia Civil (University of Southampton, 1994)
Especialista em Recursos Hídricos
da Superintendência de Informações Hidrológicas
da Agência Nacional de Águas